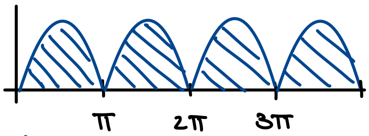
1) $\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx$

L'integrale guarda l'area non la funzione



$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \sin^2 x \, dx = +\infty$

2) $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} dx$ segni alterni

converge o no? $\lim_{x\to\infty} f(x)$ non esiste

non è zero ma a diff. delle serie non è detto non converga (infatti converge)

$y = x^2 \quad , \quad x = \sqrt{y} \quad , \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$\boxed{\text{sostituzione importante}}$

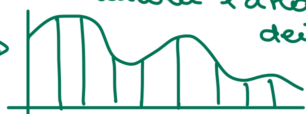
$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{2}\sin y}{\cancel{2}\sqrt{y}} dy \; , \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy \; , \quad \begin{cases} x = n\pi \\ \sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$ ⊛

$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin((k-1)\pi + x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} dx}_{a_k}$

additività dell'integrale

$y = (k-1)\pi + x$ ⊛

Mi calcola l'area dei rettangoli e li somma



$a_k \geq 0 \quad a_k \searrow \quad a_k \to 0 \Rightarrow$ Leibnitz: Questa serie converge

↳ $\sin \geq 0$ in $[0, \pi]$

Passiamo dalla serie all'integrale:

$\int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy + \boxed{\int_{n\pi}^{n\pi + x'} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}}$ $R(x)$ $\quad x = n\pi + x'$ con $x' \in [0, \pi)$

σ = valore massimo di $\frac{\sin y}{\sqrt{y}}$

$= \underbrace{I_n}_{\sum_1^{+\infty} (-1)^k a_k} + \underbrace{R(x)}_{\to 0} \qquad x \to 0$

$|R(x)| \leq (\cancel{n\pi} + x' - \cancel{n\pi})\sigma \leq$

$x' \cdot \sigma \leq \pi \cdot \sigma \leq \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ → σ

⊛ ⚠ Attenzione: potrebbe sembrare che ho un problema in 0 ma in realtà NO

Infatti posso estendere per continuità la funzione in 0:

$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}} = \lim_{y\to 0} \sqrt{y} = 0$ ☺

o anche: $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_0^a = \left[\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \right]_0^a = \left[2\sqrt{x} \right]_0^a = 2\sqrt{a} < +\infty$

⊛ $y = (k-1)\pi + x \Rightarrow y = k\pi - \pi + x \Rightarrow (k-1)\pi = y - x$

1° estremo: $\cancel{(k-1)\pi} = \cancel{(k-1)\pi} - x \Rightarrow x = 0$

2° estremo: $(k-1)\pi = k\pi - x \Rightarrow -x = \cancel{k\pi} - \pi - \cancel{k\pi} \Rightarrow x = \pi$